

## Розробка математичної моделі та числове дослідження впливу біо-кольматації на фільтраційну консолідацію ґрунту

Н. В. Іванчук, П. М. Мартинюк, О. Р. Мічута, Є. З. Маланчук, Г. О. Шліхта

Методами математичного та комп'ютерного моделювання досліджено ступінь впливу біо-кольматації на динаміку розсіювання надлишкових напорів в масиві ґрунту. З цією метою модифіковано класичне рівняння фільтраційної консолідації на випадок змінної пористості, як наслідок зміни біомаси. Числовий розв'язок сформованої математичної моделі у вигляді нелінійної крайової задачі знайдено методом скінченних елементів. Проведено числові експерименти та здійснено їх аналіз. Зокрема, представлено графіки різниць напорів в масиві ґрунту при нехтуванні біо-кольматацією та при урахуванні впливу біо-кольматації в конкретні моменти часу відповідно. Числові експерименти показали, що через два роки після початку процесу консолідації в околі нижньої межі досліджуваного масиву ґрунту товщиною 10 метрів, надлишкові напори спадають від початкового значення 10 м до 4 м. Найбільший вплив кольматація пор мікроорганізмами має в околі верхньої межі. На глибині 1 м при  $t=180$  діб різниця напорів сягає 2.4 м. Це складає близько 200 % від розподілу напорів без урахування впливу біо-кольматації. З часом ефект впливу бактерій на розподіл напорів в околі верхньої межі зменшується. Однак цей ефект поширюється на весь масив ґрунту, аж до нижньої межі. Так при  $t=540$  діб на нижній межі ефект біо-кольматації призводить до того, що надлишкові напори на 1.8 м більші, аніж для випадку фільтрації чистої води (відносне збільшення складає близько 80 %).

Процеси біо-кольматації, як результат розвитку мікроорганізмів, інтенсифікуються при надходженні в пористе середовище органічних хімічних речовин. Тому з практичної точки зору дослідження особливо актуальні для сховищ побутових відходів та стійкості їх ґрунтових основ. І проводити їх доцільно саме методами математичного та комп'ютерного моделювання.

Ключові слова: надлишкові напори, біо-кольматація, органічні відходи, метод скінченних елементів, фільтраційна консолідація.

### 1. Вступ

Проблема ущільнення ґрунтів залишається актуальною донині, а, можливо, і набирає більшої актуальності у зв'язку з інтенсифікацією будівельних робіт. Прикладання зовнішніх навантажень на ґрунт спричиняє появу надлишкових напорів в поровій рідині пористого середовища. Тому динаміку ущільнення можна прослідкувати через динаміку розсіювання цих надлишкових напорів. Наявність надлишкових напорів, наприклад в поровій рідині повністю насиченого ґрунту, означає незавершеність його (ґрунту) консолідації. Це описано в рамках так званої фільтраційної теорії консолідації ґрунтів, яка вперше знайшла відображення в математичних моделях Карла Терцагі та Віктора Флоріна [1]. Основні положення роз-

робленої у 30-х роках ХХ-го століття теорії використовують і донині. Дослідження та параметри фільтраційної консолідації ґрунтів є обов'язковим елементом Державних будівельних норм та правил [2, 3]. Всі будівельні роботи регулюються такими офіційними документами, що прирівняні до статусу законів.

Динаміка розсіювання надлишкових напорів в часі, а, отже, і динаміка процесу ущільнення, визначається фільтраційними характеристиками пористого середовища. Чим більший коефіцієнт фільтрації, який входить в закон Дарсі, тим більша швидкість розсіювання надлишкових напорів. В результаті ґрунт швидше переходить в стабілізований стан. Якщо деякі фактори впливають на зменшення коефіцієнта фільтрації (як наприклад – кольматація пор, збільшення в'язкості порової рідини, тощо), то це збільшує час розсіювання надлишкових напорів та час стабілізації ґрунтової основи споруди.

Прикладеними навантаженнями можуть бути не лише цивільні або промислові будівлі, але і сховища відходів (як рідких, так і твердих). При наявності в сховищах відходів органічних речовин одним із факторів впливу на пористість ґрунту, а отже – і на коефіцієнт фільтрації, стає розвиток мікроорганізмів. Наслідок розвитку мікроорганізмів – біо-кольматація пор пористого середовища. Наявність мікроорганізмів у порах ґрунту не може призвести до виникнення додаткових надлишкових напорів, але опосередковано, через зменшення коефіцієнта фільтрації, призводить до уповільнення розсіювання таких напорів. Їх (надлишкових напорів) наявність призводить до нерівномірних осідань ґрунту в основах цивільних та промислових споруд. Приклади натурних спостережень нерівномірних просідань ґрунту в результаті його фільтраційної консолідації наведено в роботі [4] (дослідження в місті Busan, South Korea, з 2007 по 2019 роки). В роботі [5] відмічено, що спостережувані нерівномірні просідання ґрунтів внаслідок консолідації є більшими в промислових районах, аніж на площах цивільної забудови.

В роботі [6] авторами з поміж інших факторів досліджено вплив розвитку мікробів, як одного із факторів денітрифікації в агровиробництві. Дана робота показує, що біо-процеси в пористих середовищах, в тому числі – розвиток мікроорганізмів, є важливими і їх дослідження становить актуальну задачу сьогодення. Про це свідчать і результати роботи [7]. В роботі [8] показано, фільтраційна консолідація – це процес, який може призвести до нерівномірних осідань ґрунту в основах цивільних та промислових споруд.

Процеси біо-кольматації, як результат розвитку мікроорганізмів, інтенсифікуються при надходженні в пористе середовище органічних хімічних речовин. Тому з практичної точки зору дослідження особливо актуальні для сховищ побутових відходів та стійкості їх ґрунтових основ. І проводити їх доцільно саме методами математичного та комп'ютерного моделювання.

Але, власне ущільнення пористого середовища теж пов'язане зі зміною пористості внаслідок прикладених навантажень. Тобто, якщо пористе середовище попадає в зону впливу органічних відходів, то, на відміну від класичного випадку, вже принаймні два фактори впливають на динаміку зміни пористості – прикладені навантаження та мікроорганізми. Дослідження такого випадку вимагає модифікації класичного підходу до дослідження консолідації ґрунтів методами математичного та комп'ютерного моделювання.

## **2. Аналіз літературних даних та постановка проблеми**

Дослідження процесів біо-кольматації, розвитку біо-плівок та їх впливу на параметри пористих середовищ достатньо повно наведені в [9, 10]. Проте в даних роботах не побудовано математичні моделі вказаних процесів, а представлені лише експериментальні дослідження. В роботах [11, 12] авторами виведені деякі рівняння, що є складовими частинами математичної моделі впливу розвитку мікроорганізмів на фільтраційні процеси в ґрунтових середовищах. Проте загальної математичної моделі вказаних біологічних процесів, а також її розв'язку в цих роботах не представлено. Так само наразі існує досить багато робіт, де вказані ефекти враховані в математичних та комп'ютерних моделях в пористих середовищах [13, 14].

Однак серед таких моделей відсутні математичні моделі впливу біо-кольматації на процеси розсіювання надлишкових напорів в ґрунтах, що виникають від прикладених зовнішніх навантажень. Так само в сучасних дослідженнях процесів фільтраційної консолідації методами математичного та комп'ютерного моделювання [15–17] не враховані ефекти біо-кольматації. Однак біо-кольматація пов'язана зі зменшенням об'єму пор, що в свою чергу може впливати на динаміку консолідаційних процесів, які також пов'язані із зміною об'єму порового простору. Для детальнішого дослідження, спростування або підтвердження висловленої гіпотези, потрібні більш детальні дослідження взаємопов'язаних біо-кольматаційних та консолідаційних процесів.

В роботі [18] досліджено процеси консолідації ґрунтів в умовах впливу неорганічних хімічних речовин. Особливістю присутності неорганічних хімічних розчинів в порах глинистих ґрунтів (а саме для них гостро стоїть проблема консолідації) є виражені осмотичні потоки та залежність коефіцієнта фільтрації від їх (хімічних речовин) концентрації. Остання особливість пов'язана із наявністю в глинах великої кількості зв'язної води та фільтрацією електроліту, як розчину неорганічної хімічної речовини. Крім того, в роботі [19] досліджено вплив процесів засолення–розсолоння на динаміку розсіювання надлишкових напорів. Однак у вказаних роботах не розглянуто особливості консолідації ґрунтів на випадок поширення органічних речовин. При наявності в ґрунті органічних речовин інтенсифікується розвиток мікроорганізмів (що принципово неможливо при наявності неорганічних хімічних речовин) і, як наслідок – відбувається біо-кольматація пористого матеріалу.

Біо-кольматація призводить до зміни гідрофізичних параметрів пористого середовища. Зокрема гідропровідність середовища знижується, що математично відображається у зменшенні коефіцієнта фільтрації. Приклади таких досліджень, які підтверджують висловлене твердження, наведено, наприклад, в роботах [20, 21]. В роботі [20], наприклад, встановлено, що величина коефіцієнта фільтрації ґрунту зменшилась на порядок на 540-ву добу від початку експерименту, в той час як в [21] – вже на 12-ту. Детальний огляд наукових робіт із впливу біо-кольматації на значення коефіцієнта фільтрації наведено в [22]. Також в роботі [22] побудовано відповідну математичну модель та досліджено вплив біо-кольматації на значення стрибків напорів в геобар'єрі. Впливу ж на самі надлишкові напори у всьому масиві ґрунту там не досліджено. Крім того, в якості рівняння консолідації викорис-

тано класичне. В той же час, в роботі [23] запропоновано методику виведення рівняння консолідації з урахуванням динамічної зміни різних факторів впливу. Вказана методика також використана при дослідженні процесів очищення в біоплато-фільтрах. Стаття [24] присвячена математичному моделюванню динамічних процесів фільтраційної консолідації в насичених геопористих середовищах на основі біпараболічного рівняння еволюції та його дробово-диференціального аналога. В роботі [25] представлено розв'язування задачі ущільнення ґрунту з пороговим градієнтом, який може бути виражений елементарними функціями. Однак такий фактор впливу як біо-кольматація не врахований.

Отже, біо-кольматація, як один із наслідків розвитку мікроорганізмів, призводить до зміни гідрологічних параметрів ґрунту в основах сховищ органічних відходів. Однак у відомих математичних моделях ущільнення ґрунтів такі зміни не враховані. Саме тому обґрунтованим є проведення досліджень, в яких висвітлювалися б рішення питань щодо оцінки впливу наявності мікроорганізмів у порах ґрунту на динаміку розсіювання надлишкових напорів. Для цього необхідно вдосконалити математичну модель фільтраційної консолідації шляхом урахування ефекту біо-кольматації в рівнянні для напорів; знайти числові скінченноелементні розв'язки відповідної нелінійної крайової задачі для системи диференціальних рівнянь; провести серію числових експериментів та здійснити їх аналіз.

### 3. Мета та задачі дослідження

Метою дослідження є кількісна оцінка впливу наявності мікроорганізмів у порах ґрунту на динаміку розсіювання надлишкових напорів в масиві ґрунту, який перебуває в стані фільтраційної консолідації. Це дасть можливість зробити висновки про ступінь впливу біо-кольматації на процес ущільнення.

Для досягнення поставленої мети були сформовані такі завдання:

- побудувати математичну модель фільтраційної консолідації з урахуванням ефекту біо-кольматації.
- знайти числові скінченноелементні розв'язки відповідної нелінійної крайової задачі для системи диференціальних рівнянь;
- провести серію числових експериментів та здійснити їх аналіз.

### 4. Матеріали та методи дослідження

Виведення модифікованого рівняння фільтраційної консолідації на випадок впливу біо-кольматації ґрунтується на основі результатів роботи [23]. В роботі [23] узагальнене рівняння фільтраційної консолідації з урахуванням впливу техногенних факторів має наступний вигляд

$$\begin{aligned} \frac{\partial e}{\partial t} + \frac{\partial e}{\partial \Theta} \cdot \frac{\partial \Theta}{\partial t} + \sum_{i=2}^n \frac{\partial e}{\partial s_i} \cdot \frac{\partial s_i}{\partial t} + e \left( \frac{1}{\rho_p} \frac{d\rho_p}{dt} - \frac{1}{\rho_m} \frac{d\rho_m}{dt} \right) = \\ = (1 + e) \left( \nabla \cdot (k_h(t, S) \nabla h) - \nabla \cdot F_{osm} \right). \end{aligned} \quad (1)$$

Тут:

- $e$  – коефіцієнт пористості ґрунту;
- $\Theta$  – сума головних напружень в скелеті пористого середовища;
- $S=(\Theta, s_2, \dots, s_n)$  – фактори впливу на зміну пористості та коефіцієнта фільтрації  $k_h$ ;
- $F_{osm}$  – осмотичний потік;
- $\rho_p, \rho_m$  – густини води та твердих, водорозчинних компонент;
- $h$  – надлишкові напори в поровій рідині.

Зроблено наступні припущення. По-перше, розглянуто одновимірний випадок з однією просторовою змінною  $x$ . По-друге, припустимо, що в пори ґрунту надходить хімічний розчин органічної речовини. Такі хімічні розчини можуть бути наслідком просочування або поверхневих стоків зі сховищ відходів. Про можливість такого сценарію на випадок утилізації твердих муніципальних відходів вказано, наприклад, в оглядовій роботі [26]. Про можливість таких фільтраційних потоків сказано і в роботі [27], яка присвячена моделі BIOLEACH для оцінки виробництва біогазу в режимі реального часу.

Для органічних речовин осмотичні потоки не є характерними і  $F_{osm} \equiv 0$ . Також тверді водорозчинні компоненти відсутні і  $d\rho_m/dt \equiv 0$ . Концентрація хімічного органічного розчину є малою і  $d\rho_p/dt \equiv 0$ . Також із факторів впливу розглянемо лише біо-кольматацию, тобто зміну біомаси мікроорганізмів в пористому середовищі.

Для відшукування наближеного розв'язку відповідної нелінійної крайової задачі використано числові методи, а саме метод скінченних елементів (МСЕ). МСЕ дозволяє провести дискретизацію задачі по просторових змінних. В результаті цього отримуємо задачу Коші для системи нелінійних диференціальних рівнянь першого порядку стосовно невідомих функцій, що залежать лише від часу. Для відшукування її (задачі Коші) розв'язку застосовуються схеми дискретизації в часі. В числових експериментах в якості базисних функцій МСЕ використовувались кусково-квадратичні, а в якості схеми дискретизації в часі застосовувалась повністю неявна лінеаризована різницева схема.

Власне для проведення числових експериментів в якості органічної речовини приймався розчин глюкози. Для залежностей коефіцієнта фільтрації від пористості та переведення біомаси в об'єм використовувались дані з наукової літератури.

## **5. Результати дослідження задачі фільтраційної консолідації з урахуванням ефекту біо-кольматации методом скінченних елементів**

### **5.1. Побудова математичної моделі ущільнення насиченого ґрунту з урахуванням ефекту біо-кольматации**

Враховуючі обрані припущення та нехтуючи повзучістю скелету ґрунту із рівняння (1) маємо

$$\gamma a \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial e}{\partial B} \frac{dB}{dt} = (1+e) \frac{\partial}{\partial x} \left( k(e) \frac{\partial h}{\partial x} \right). \quad (2)$$

Тут  $a$  – коефіцієнт стискуваності ґрунту в компресійній залежності (для одновимірного випадку маємо  $e = -a\Theta + e_0$ );  $B$  – біомаса мікроорганізмів в ґрунті (віднесені до одиниці об'єму пористого середовища).

Процес фільтраційної консолідації на випадок поширення органічних хімічних речовин досліджуємо в шарі ґрунту загальною товщиною  $l$  (рис. 1).

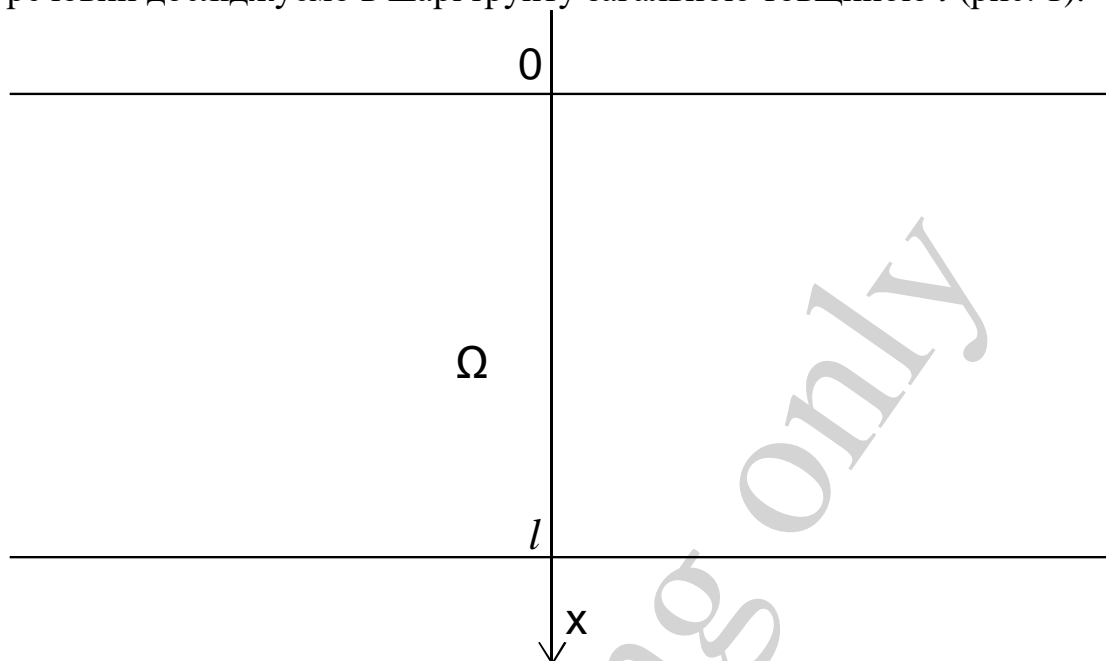


Рис. 1. Шар досліджуваного ґрунту

Математична модель буде включати виведене вище рівняння (2) фільтраційної консолідації. Також її складовими частинами мають бути рівняння перенесення органічних хімічних речовин в поровій рідині пористого середовища та рівняння динаміки біомаси бактерій в пористому середовищі на основі рівняння Моно [22]. В результаті маємо наступну крайову задачу:

$$\gamma a \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial e}{\partial B} \frac{dB}{dt} = (1 + e) \frac{\partial}{\partial x} \left( k(e) \frac{\partial h}{\partial x} \right),$$

$$x \in \Omega, \quad t > 0, \quad (3)$$

$$h(x, t) \Big|_{x=0} = \bar{h}_0(t), \quad t \geq 0, \quad (4)$$

$$u(x, t) \Big|_{x=l} = \left( -k(e) \frac{\partial h}{\partial x} \right) \Big|_{x=l} = 0, \quad t \geq 0, \quad (5)$$

$$h(x, 0) = h_0(x), \quad x \in \Omega, \quad (6)$$

$$n \frac{\partial c}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( nD \frac{\partial c}{\partial x} \right) - u \frac{\partial c}{\partial x} - \frac{\mu_{\max}}{Y} B \left( 1 - \frac{B}{B_{\max}} \right) \frac{c}{k_c + c},$$

$$x \in \Omega, t > 0, \quad (7)$$

$$c(x, t)|_{x=0} = \bar{c}_0(t), t \geq 0, \quad (8)$$

$$q_c(x, t)|_{x=l} = -nD \frac{\partial c}{\partial x} \Big|_{x=l} = 0, t \geq 0, \quad (9)$$

$$c(x, 0) = c_0(x), x \in \Omega, \quad (10)$$

$$\frac{\partial B}{\partial t} = \mu_{\max} B \left( 1 - \frac{B}{B_{\max}} \right) \frac{c}{k_c + c} - \mu_{dec} B,$$

$$x \in \Omega, t > 0, \quad (11)$$

$$B(x, 0) = B_0(x), x \in \Omega. \quad (12)$$

Тут:

- $h$  – надлишковий напір;
- $k$  – коефіцієнт фільтрації, який залежить від коефіцієнта пористості  $e$ ;
- $u$  – швидкість фільтрації;
- $n$  – пористість ґрунту;
- $q_c$  – потік хімічних речовин;
- $\mu_{dec}$  – коефіцієнт розпаду біомаси;
- $c$  – концентрація порового розчину органічної хімічної речовини;
- $D$  – коефіцієнт дифузії органічної речовини;
- $\mu_{\max}$  – максимальний рівень росту біомаси;
- $B$  – концентрація біомаси бактерій в пористому середовищі;
- $B_{\max}$  – максимально можлива концентрація біомаси бактерій в пористому середовищі;
- $k_c$  – параметр в рівнянні динаміки біомаси, при якому рівень росту біомаси дорівнює половині максимального;
- $Y$  – бактеріальний вихід.

## 5.2. Числове розв'язання задачі фільтраційної консолідації з урахуванням ефекту біо-кольтматації методом скінченних елементів

Аналогічно [28], нехай  $H_0$  – простір вектор-функцій  $\{s_1(x); s_2(x); s_3(x)\}$ , кожна із компонент яких на інтервалі  $(0;1)$  належать простору Соболева  $W_2^1(\Omega)$ , причому перші дві набувають нульових значень на кінцях відрізка  $[0,1]$ , де для

функцій  $h(x, t)$  та  $c(x, t)$  задані граничні умови першого роду відповідно. Нехай  $H$  – простір функцій  $\{v_1(x, t); v_2(x, t); v_3(x, t)\}$ , кожна із компонент яких інтегрована з квадратом разом зі своїми першими похідними на інтервалі  $(0; 1)$

$$\frac{\partial v_i}{\partial t}, \frac{\partial v_i}{\partial x}, i = \overline{1, 3}, \forall t \in (0; T].$$

Причому перші дві задовольняють граничні умови першого роду, що і функції  $h(x, t)$ ,  $c(x, t)$  відповідно. Тут  $T > 0$ .

Візьмемо  $\{s_1(x); s_2(x); s_3(x)\}$  належить  $H_0$ . Домножимо рівняння (3) та початкову умову (6) на  $s_1(x)$ , інтегруючи їх на відрізьку  $[0, 1]$ , отримаємо

$$\begin{aligned} \int_0^l \gamma a \frac{\partial h}{\partial t} s_1(x) dx + \int_0^l \frac{\partial e}{\partial B} \frac{\partial B}{\partial t} s_1(x) dx + \\ + \int_0^l (1 + e) k(e) \frac{\partial h}{\partial x} \frac{ds_1(x)}{dx} dx = 0, \end{aligned} \quad \forall t \in (0; T], \quad (13)$$

$$\int_0^l h(x, 0) s_1(x) dx = \int_0^l h_0(x) s_1(x) dx, \quad \forall t \in (0; T]. \quad (14)$$

Аналогічно, для концентрації органічних хімічних речовин та біомаси маємо

$$\begin{aligned} \int_0^l n \frac{\partial c}{\partial t} s_2(x) dx + \int_0^l n D \frac{\partial c}{\partial x} \frac{ds_2(x)}{dx} dx + \\ + \int_0^l u \frac{\partial c}{\partial x} s_2(x) dx + \\ + \int_0^l \frac{\mu_{\max}}{Y} \left( 1 - \frac{B}{B_{\max}} \right) B \frac{c}{k_c + c} s_2(x) dx = 0, \end{aligned} \quad \forall t \in (0; T], \quad (15)$$

$$\int_0^l c(x, 0) s_2(x) dx = \int_0^l c_0(x) s_2(x) dx, \quad \forall t \in (0; T], \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \int_0^l \frac{\partial B}{\partial t} s_3(x) dx - \int_0^l \left( \mu_{\max} \left( 1 - \frac{B}{B_{\max}} \right) \frac{c}{k_c + c} - \mu_{dec} \right) B s_3(x) dx = 0, \\ \forall t \in (0; T], \end{aligned} \quad (17)$$



$$\int_0^l B(x,0) s_3(x) dx = \int_0^l B_0(x) s_3(x) dx, \quad \forall t \in (0; T]. \quad (18)$$

*Означення 1.* Функція  $\{h(x,t); c(x,t); B(x,t)\}$ , що належить  $H$ , котра для будь-якої  $\{s_1(x); s_2(x); s_3(x)\}$  задовольняє інтегральним співвідношенням (13)–(18), називається узагальненим розв'язком крайової задачі (3)–(12).

Наближений узагальнений розв'язок крайової задачі (3)–(12) шукаємо у вигляді

$$\begin{aligned} h(x,t) &= \sum_{i=1}^N h_i(t) \phi_{i1}(x), \quad c(x,t) = \sum_{i=1}^N c_i(t) \phi_{i2}(x), \\ B(x,t) &= \sum_{i=1}^N B_i(t) \phi_{i3}(x), \end{aligned} \quad (19)$$

де  $h_i(t)$ ,  $c_i(t)$ ,  $B_i(t)$  – невідомі коефіцієнти, які залежать лише від часу. Якщо розглядати (19) як наближений скінченноелементний розв'язок, то функції  $\phi_{i1}(x)$ ,  $\phi_{i2}(x)$ ,  $\phi_{i3}(x)$  є поліноміальними базисними функціями зі скінченним носієм. Аналогічно [22] для спрощення подальших викладок і відповідно до числових експериментів будемо вважати, що для наближеного відшукування  $h(x,t)$ ,  $c(x,t)$  та  $B(x,t)$  використовується одна і та ж сітка скінченних елементів. При цьому  $\phi_{i1}(x) \equiv \phi_{i2}(x) \equiv \phi_{i3}(x)$  і, для уникнення подвійної індексації, позначимо вказані базисні функції як  $\phi_i(x)$ ,  $i = \overline{1, N}$ .

Далі із слабкого формулювання (13)–(18) задачі (3)–(12), враховуючи (19), отримаємо

$$M_1 \cdot \frac{dH}{dt} + M_{13} \cdot \frac{dB}{dt} + L_1(B) \cdot H(t) = 0, \quad (20)$$

$$M_1' \cdot H^{(0)} = F_1', \quad (21)$$

$$M_2(B) \cdot \frac{dC}{dt} + L_2(H, B) \cdot C(t) = 0, \quad (22)$$

$$M_2' \cdot C^{(0)} = F_2', \quad (23)$$

$$M_3 \cdot \frac{dB}{dt} + L_3(C, B) \cdot B(t) = 0, \quad (24)$$

$$M_3' \cdot B^{(0)} = F_3', \quad (25)$$

де

$$H = (h_i(t))_{i=1}^N, \quad C = (c_i(t))_{i=1}^N, \quad B = (b_i(t))_{i=1}^N,$$

$$H^{(0)} = (h_i(0))_{i=1}^N, \quad C^{(0)} = (c_i(0))_{i=1}^N, \quad B^{(0)} = (b_i(0))_{i=1}^N,$$

$$M_k = (m_{ij}^{(k)})_{i,j=1}^N, \quad L_k = (l_{ij}^{(k)})_{i,j=1}^N, \quad F_k = (f_i^{(k)})_{i=1}^N,$$

$$F_k' = (f_i^{(k)})_{i=1}^N, \quad M_k' = (m_{ij}^{(k)})_{i,j=1}^N,$$

$$m_{ij}^{(k)} = \int_0^l \varphi_i \varphi_j dx, \quad k = \overline{1,3}, \quad M_{13} = (m_{ij}^{(13)})_{i,j=1}^N,$$

$$m_{ij}^{(1)} = \int_0^l \gamma a \phi_i \phi_j dx, \quad f_{ij}^{(1)} = \int_0^l h_0 \varphi_i dx,$$

$$l_{ij}^{(1)} = \int_0^l (1+e)k(e) \frac{d\phi_i}{dx} \frac{d\phi_j}{dx} dx,$$

$$m_{ij}^{(13)} = \int_0^l \frac{\partial e}{\partial B} \varphi_i \varphi_j dx,$$

$$m_{ij}^{(2)} = \int_0^l n \phi_i \phi_j dx, \quad f_{ij}^{(2)} = \int_0^l c_0 \varphi_i dx,$$

$$l_{ij}^{(2)} = \int_0^l nD \frac{d\phi_j}{dx} \frac{d\phi_i}{dx} dx + \int_0^l u \frac{d\phi_j}{dx} \phi_i dx + \int_0^l \frac{\mu_{\max}}{Y} \left(1 - \frac{B}{B_{\max}}\right) \frac{B}{k_c + c} \phi_j \phi_i dx,$$

$$m_{ij}^{(3)} = \int_0^l \phi_i \phi_j dx, \quad f_{ij}^{(3)} = \int_0^l B_0 \varphi_i dx,$$

$$l_{ij}^{(3)} = - \int_0^l \left( \mu_{\max} \left(1 - \frac{B}{B_{\max}}\right) \frac{c}{k_c + c} - \mu_{dec} \right) \phi_j \phi_i dx.$$

Система рівнянь (20)–(25) є задачею Коші для системи нелінійних диференціальних рівнянь першого порядку. Відшукання її розв'язку теж вимагає застосування відповідних схем дискретизації, які детально описані в роботах [22, 29].

### 5. 3. Результати числових експериментів розв'язку задачі фільтраційно-консолідації з урахуванням ефекту біо-кольматації

Для модельної задачі розглянуто шар ґрунту товщиною  $l=10$  м. Крок по змінній  $x$  становив  $0.02$  м. Крок по часу  $\tau=1$  день,  $a=5.12 \cdot 10^{-5}$  м<sup>2</sup>/Н – коефіцієнт стискуваності ґрунту,  $\gamma=10^4$  Н/м<sup>3</sup> – питома вага порового розчину. Початковий розподіл напорів  $h_0(x)=10$  м, що відповідає прикладанню до поверхні ґрунту відповідного навантаження – відходів, які є джерелом органічної речовини. На верхній межі забезпечується безперешкодний відтік порової рідини, а на нижній межі дренаж відсутній. В якості ґрунту розглядався Silt Loam [30] при:  $k_0=0.108$  м/день,  $n_0=0.45$ , де індекс «0» означає початкові значення. Також  $e_0=n_0/(1-n_0)$ .

В якості органічного розчину розглядався розчин глюкози [22]. Початковий розподіл концентрації глюкози в поровій воді  $c_0(x)=1$  мМ. Коефіцієнт дифузії глюкози  $D=0.5184 \cdot 10^{-4}$  м<sup>2</sup>/день.

Для залежності коефіцієнта фільтрації від пористості використана залежність [31]

$$\frac{k}{k_0} = \left( \frac{n_0 - n_B}{n_0} \right)^{19/6},$$

де  $n_B$  – об'єм біомаси в одиниці об'єму пористого середовища. Для переведення концентрації біомаси в об'єм скористаємось припущенням, що біооб'єм на 80 % складається із води, а решта 20 % сухої маси – це 50-ти відсотковий вуглець (bio-carbon) [32]. Тобто

$$n_B = \frac{B}{0.8\rho_w + 0.2 \cdot \frac{\rho_c}{2}},$$

де  $\rho_w$  – густина води;  $\rho_c$  – густина біо-вуглецю. В числових експериментах  $\rho_c=100$  кг/м<sup>3</sup>. Параметри кінетики біомаси наступні:  $\mu_{\max}=0.2$  день<sup>-1</sup>,  $B_{\max}=100$  кг/м<sup>3</sup>,  $\mu_{dec}=0.01$  день<sup>-1</sup>,  $k_c=0.06$  мМ,  $Y=50$ . Зважаючи на залежність  $e=n/(1-n)$  маємо

$$\frac{\partial e}{\partial B} = \frac{\partial e}{\partial n} \cdot \frac{\partial n}{\partial B} = -\frac{1}{(1-n)^2} \frac{1}{0.8\rho_n + 0.2 \frac{\rho_c}{2}},$$

де  $n=n_0-n_B$ .

В якості базисних функцій МСЕ використовувались кусково-квадратичні. Результати числових експериментів наведено на рис. 2–4.

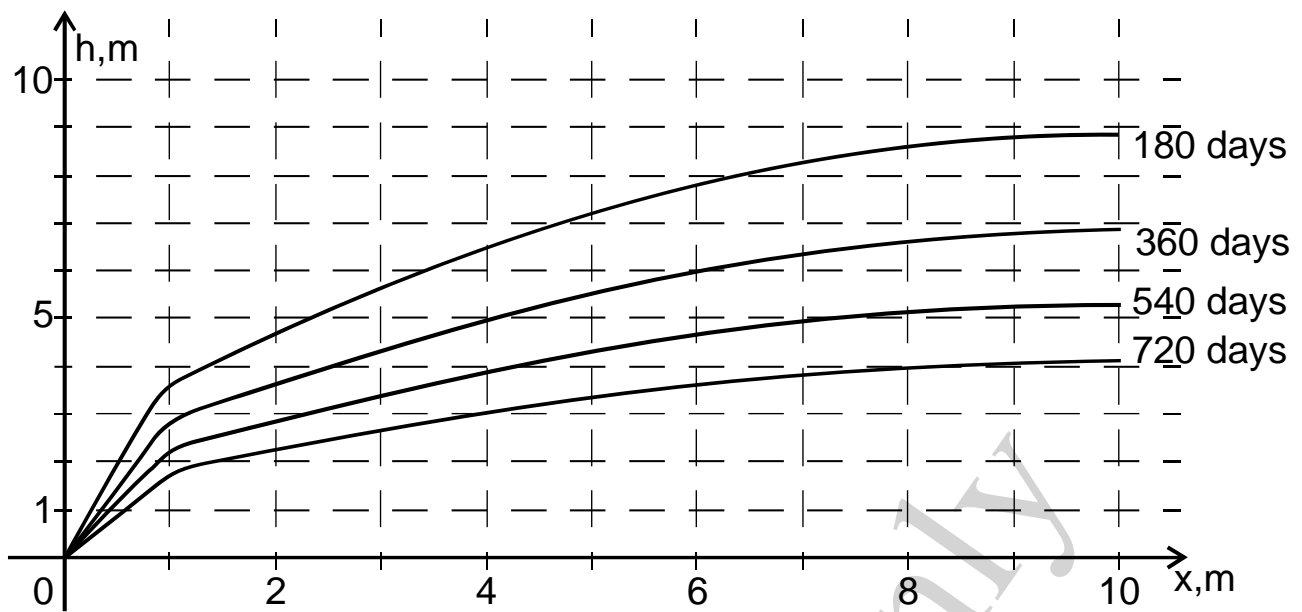


Рис. 2. Розподіл надлишкових напорів в умовах впливу біо-кольматації

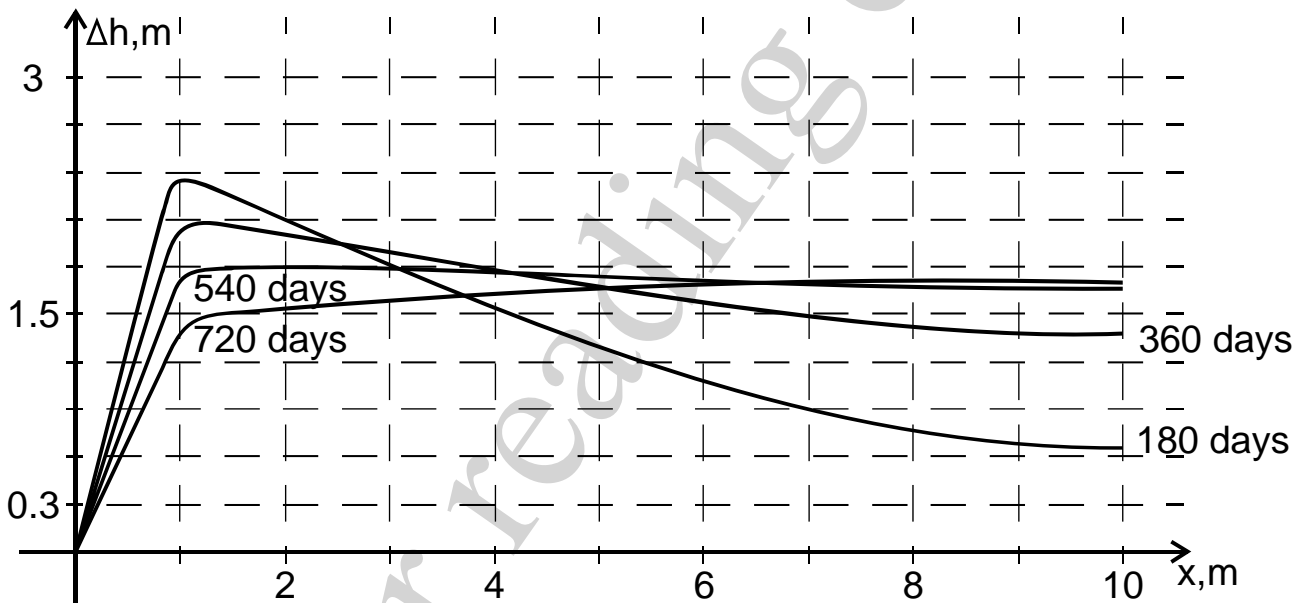


Рис. 3. Розподіл різниці надлишкових напорів з урахуванням та без урахування впливу біо-кольматації

На рис. 2–4 для прикладу наведено результати числових експериментів при  $t = 180$  діб,  $360$  діб,  $540$  діб та  $720$  діб.

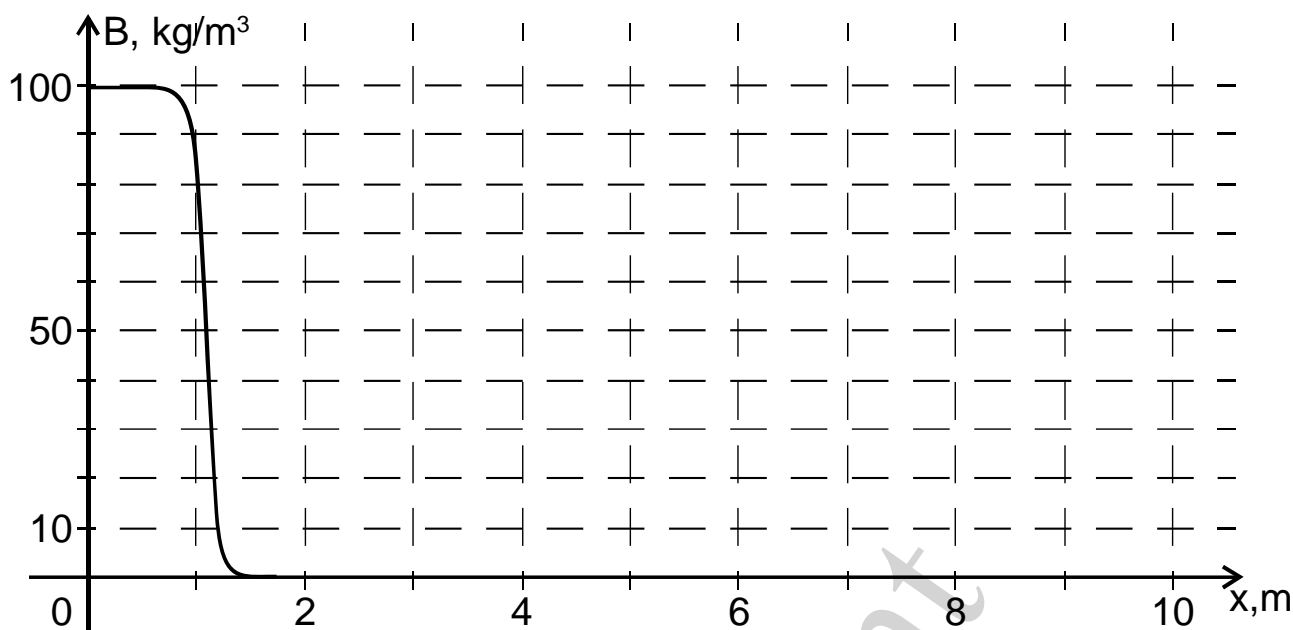


Рис. 4. Розподіл біомаси бактерій на момент часу 720 діб

#### 6. Обговорення результатів розв'язку задачі фільтраційної консолідації з урахуванням ефекту біо-кольматації

Як видно з рис. 2, через два роки (720 діб) після початку процесу консолідації в околі нижньої межі масиву ґрунту надлишкові напори спадають від початкового значення 10 м до 4 м. Сам ефект впливу біо-кольматації найкраще прослідковується з рис. 3. На ньому наведено графіки різниць надлишкових напорів на випадок урахування впливу біо-кольматації та без урахування відповідно. Тому додатні значення різниць напорів на рис. 3 означають, що при урахуванні біо-кольматації напори розсіюються повільніше, аніж для випадку нехтування таким явищем. Сповільнення розсіювання напорів фізично означає незавершену консолідацію масиву ґрунту. Найбільший вплив кольматація пор мікроорганізмами має в околі верхньої межі. Це логічно, адже з верхньої межі в ґрунт надходять поживні речовини і саме на невеликій глибині (рис. 4) відбувається інтенсивний розвиток біомаси бактерій. Як видно з рис. 3, на глибині 1 м при  $t=180$  діб різниця напорів сягає 2.4 м. Це складає близько 200 % від розподілу напорів без урахування впливу біо-кольматації. Незначна глибина проникнення біомаси бактерій пояснюється характером поширення органічних речовин. Як видно з рис. 2, швидкість фільтрації порової рідини буде спрямована в бік верхньої межі (в напрямку антиградієнта напорів). Тому основну роль в поширенні органічних речовин в ґрунт буде відігравати дифузійна складова. Зважаючи на малий коефіцієнт дифузії розчину глюкози за два роки органічна речовина проникне в ґрунтову основу лише на 2 метри. А це впливає на динаміку розвитку мікроорганізмів, основну роль для якої відіграє наявність поживних речовин. З часом ефект впливу бактерій на розподіл напорів в околі верхньої межі зменшується. Однак цей ефект поширюється на весь масив ґрунту, аж до нижньої межі (графіки на рис. 3 при  $t=540$  діб,  $t=720$  діб). Так при  $t=540$  діб на нижній межі ефект біо-кольматації призводить до того, що надлишкові напори

на 1.8 м більші, аніж для випадку фільтрації чистої води (відносне збільшення складає близько 80 %).

З фізичної точки зору біо-кольматація, що означає зменшення об'єму пор, має призвести до уповільнення розсіювання надлишкових напорів (адже коефіцієнт фільтрації також зменшується). Такі висновки підтверджуються результатами числових експериментів (наприклад рис. 3). Розподіл різниці напорів на рис. 3 фактично підтверджує фізику процесу. Однак для кількісної оцінки впливу потрібно знайти розв'язки вдосконаленої математичної моделі. На прикладі числового експерименту показано, що вплив біо-кольматації спричиняє зміни в напорах на 80–200 % в порівнянні з фільтрацією чистої води. Незважаючи на поширення мікроорганізмів лише на глибину 2 метри, як показують графіки на рис. 3, за 1,5–2 роки ефект впливу біо-кольматації поширюється на напори до глибини 10 метрів.

Однак для можливості проведення таких обрахунків для реальних умов мають бути відомими гідрологічні характеристики ґрунтів та параметри динаміки росту мікроорганізмів. Розвиток дослідження полягатиме в збільшенні розмірності задачі, вдосконаленні моделей розвитку мікроорганізмів та пропонуванні конкретних інженерних рішень для зменшення впливу ефекту біо-кольматації на надлишкові напори в ґрунті.

## **7. Висновки**

1. Вдосконалено математичну модель фільтраційної консолідації при фільтрації органічних речовин в масиві ґрунту з урахуванням ефекту біо-кольматації. При цьому модифіковано рівняння фільтраційної консолідації з урахуванням впливу на зміну пористості динаміки розвитку біомаси. В якості рівняння динаміки біомаси бактерій в пористому середовищі використано рівняння Моно.

2. Числові розв'язки відповідної нелінійної крайової задачі знайдено методом скінченних елементів. Комп'ютерне моделювання показало, що наявність мікроорганізмів у порах ґрунту значно впливає на динаміку розсіювання надлишкових напорів. Зокрема біо-кольматація (на основі розв'язання модельної задачі) призводить до відносного сповільнення розсіювання напорів на 80–200 % в порівнянні з випадком нехтування діяльністю мікроорганізмів. Такі впливи потрібно враховувати при дослідженнях зсувонебезпечних ділянок, які піддаються впливу органічних хімічних речовин, адже наявність надлишкових напорів може спричинити інтенсифікацію зсувних процесів. Оцінка ступеня таких впливів на зсувонебезпечність становить суть окремої задачі досліджень в механіці пористих середовищ.

3. Результати експериментів показали адекватність вдосконаленої математичної моделі для досліджених процесів – сповільнення розсіювання напорів при впливі біо-кольматації. На практиці проведені дослідження можуть використовуватись при підготовці проектної документації та конструкторських особливостях сховищ органічних відходів. Розвиток мікроорганізмів і процес біо-кольматації пор пористого середовища біомасою призводить до уповільнення розсіювання надлишкових напорів. Адже надлишкові напори загалом є негативним явищем, яке призводить до порушення стійкості ґрунтових основ будівель.

## Подяка

Дослідження авторів фінансується науково-дослідною роботою “Математичне та комп’ютерне моделювання техногенних керованих процесів в пористих середовищах з бар’єрами за умов ідентифікації” (“Mathematical and computer modeling of technogenic controlled processes in porous media with barriers under conditions of identification”), номер державної реєстрації НДР 0120U102055.

## Література

1. Zaretskii, Yu. K. (1972). Theory of soil consolidation. Israel Program for Scientific Translation.
2. ДБН В.2.4-3:2010 (2010). Державні будівельні норми України. Гідротехнічні, енергетичні та меліоративні системи і споруди, підземні гірничі виробки. Гідрологічні споруди. Основні положення. Київ: Мінрегіонбуд України. Available at: <https://dbn.co.ua/load/normativy/dbn/1-1-0-802>
3. ДБН В.2.1-10-2009 (2009). Державні будівельні норми України. Об’єкти будівництва та промислова продукція будівельного призначення. Основи та фундаменти будинків і споруд. Основи та фундаменти споруд. Основні положення проектування. Київ: Мінрегіонбуд України. Available at: [https://dbn.co.ua/load/normativy/dbn/dbn\\_v21\\_10\\_2009/1-1-0-319](https://dbn.co.ua/load/normativy/dbn/dbn_v21_10_2009/1-1-0-319)
4. Park, S., Hong, S. (2021). Nonlinear Modeling of Subsidence From a Decade of InSAR Time Series. *Geophysical Research Letters*, 48 (3). doi: <http://doi.org/10.1029/2020gl090970>
5. Widada, S., Zainuri, M., Yulianto, G., Satriadi, A., Wijaya, Y. (2020). Estimation of Land Subsidence Using Sentinel Image Analysis and Its Relation to Subsurface Lithology Based on Resistivity Data in the Coastal Area of Semarang City, Indonesia. *Journal of Ecological Engineering*, 21 (8), 47–56. doi: <http://doi.org/10.12911/22998993/127394>
6. Knabe, D., Kludt, C., Jacques, D., Lichtner, P., Engelhardt, I. (2018). Development of a Fully Coupled Biogeochemical Reactive Transport Model to Simulate Microbial Oxidation of Organic Carbon and Pyrite Under Nitrate-Reducing Conditions. *Water Resources Research*, 54 (11), 9264–9286. doi: <http://doi.org/10.1029/2018wr023202>
7. Moshynsky, V., Riabova, O. (2013). Approaches to Aquatic Ecosystems Organic Energy Assessment and Modelling. Black Sea Energy Resource Development and Hydrogen Energy Problems. NATO Science for Peace and Security Series C: Environmental Security. Dordrecht: Springer, 125–135. doi: [http://doi.org/10.1007/978-94-007-6152-0\\_12](http://doi.org/10.1007/978-94-007-6152-0_12)
8. Мичута, О. Р., Власюк, А. П., Мартынюк, П. М. (2013). Моделирование влияния химической суффозии на фильтрационную консолидацию засоленных грунтов в неизотермических условиях. Математическое моделирование, 25 (2), 3–18. Available at: [http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=mm&paperid=3327&option\\_lang=rus](http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=mm&paperid=3327&option_lang=rus)

9. Gui, R., Pan, Y., Ding, D., Liu, Y., Zhang, Z. (2018). Experimental Study on Bioclogging in Porous Media during the Radioactive Effluent Percolation. *Advances in Civil Engineering*, 2018, 1–6. doi: <http://doi.org/10.1155/2018/9671371>
10. Wang, Y., Huo, M., Li, Q., Fan, W., Yang, J., Cui, X. (2018). Comparison of clogging induced by organic and inorganic suspended particles in a porous medium: implications for choosing physical clogging indicators. *Journal of Soils and Sediments*, 18 (9), 2980–2994. doi: <http://doi.org/10.1007/s11368-018-1967-6>
11. Thullner, M., Regnier, P. (2019). Microbial Controls on the Biogeochemical Dynamics in the Subsurface. *Reviews in Mineralogy and Geochemistry*, 85 (1), 265–302. doi: <http://doi.org/10.2138/rmg.2019.85.9>
12. Glatstein, D. A., Montoro, M. A., Carro Pérez, M. E., Francisca, F. M. (2017). Hydraulic, Chemical and Biological Coupling on Heavy Metals Transport Through Landfills Liners. *The Journal of Solid Waste Technology and Management*, 43 (3), 261–269. doi: <http://doi.org/10.5276/jswt.2017.261>
13. Mohanadhas, B., Kumar, G. S. (2019). Numerical Experiments on Fate and Transport of Benzene with Biological Clogging in Vadoze Zone. *Environmental Processes*, 6 (4), 841–858. doi: <http://doi.org/10.1007/s40710-019-00402-w>
14. Lopez-Peña, L. A., Meulenbroek, B., Vermolen, F. (2019). A network model for the biofilm growth in porous media and its effects on permeability and porosity. *Computing and Visualization in Science*, 21 (1-6), 11–22. doi: <http://doi.org/10.1007/s00791-019-00316-y>
15. Bohaienko, V., Bulavatsky, V. (2020). Fractional-Fractal Modeling of Filtration-Consolidation Processes in Saline Saturated Soils. *Fractal and Fractional*, 4 (4), 59. doi: <http://doi.org/10.3390/fractalfract4040059>
16. Józefiak, K., Zbiciak, A., Brzeziński, K., Maślakowski, M. (2021). A Novel Approach to the Analysis of the Soil Consolidation Problem by Using Non-Classical Rheological Schemes. *Applied Sciences*, 11 (5), 1980. doi: <http://doi.org/10.3390/app11051980>
17. Tian, Y., Wu, W., Jiang, G., El Naggar, M. H., Mei, G., Xu, M., Liang, R. (2020). One-dimensional consolidation of soil under multistage load based on continuous drainage boundary. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 44 (8), 1170–1183. doi: <http://doi.org/10.1002/nag.3055>
18. Vlasyuk, A. P., Martynyuk, P. M. (2010). Numerical solution of three-dimensional problems of filtration consolidation with regard for the influence of technogenic factors by the method of radial basis functions. *Journal of Mathematical Sciences*, 171 (5), 632–648. doi: <http://doi.org/10.1007/s10958-010-0163-z>
19. Vlasyuk, A. P., Martynyuk, P. M., Fursovych, O. R. (2009). Numerical solution of a one-dimensional problem of filtration consolidation of saline soils in a nonisothermal regime. *Journal of Mathematical Sciences*, 160 (4), 525–535. doi: <http://doi.org/10.1007/s10958-009-9518-8>
20. Glatstein, D. A., Francisca, F. M. (2014). Hydraulic conductivity of compacted soils controlled by microbial activity. *Environmental Technology*, 35 (15), 1886–1892. doi: <http://doi.org/10.1080/09593330.2014.885583>



21. Tang, Q., Gu, F., Zhang, Y., Zhang, Y., Mo, J. (2018). Impact of biological clogging on the barrier performance of landfill liners. *Journal of Environmental Management*, 222, 44–53. doi: <http://doi.org/10.1016/j.jenvman.2018.05.039>
22. Ulyanchuk-Martyniuk, O., Michuta, O., Ivanchuk, N. (2020). Biocolmation and the finite element modeling of its influence on changes in the head drop in a geobarrier. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, 4 (10 (106)), 18–26. doi: <http://doi.org/10.15587/1729-4061.2020.210044>
23. Герус, В. А., Мартинюк, П. М. (2015). Узагальнення рівняння консолідації ґрунтів з урахуванням впливу фізико-хімічних факторів. *Вісник Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна. Серія: Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління*, 27, 41–52. Available at: [http://nbuv.gov.ua/UJRN/VKhIMAM\\_2015\\_27\\_7](http://nbuv.gov.ua/UJRN/VKhIMAM_2015_27_7)
24. Bulavatsky, V. M., Bohaienko, V. O. (2020). Some Consolidation Dynamics Problems within the Framework of the Biparabolic Mathematical Model and its Fractional-Differential Analog. *Cybernetics and Systems Analysis*, 56 (5), 770–783. doi: <http://doi.org/10.1007/s10559-020-00298-7>
25. Wang, H.-X., Xu, W., Zhang, Y.-Y., Sun, D.-A. (2021). Simplified solution to one-dimensional consolidation with threshold gradient. *Computers and Geotechnics*, 131, 103943. doi: <http://doi.org/10.1016/j.compgeo.2020.103943>
26. Araujo, F., Fantucci, H., Nunes, E., Santos, R. M. (2020). Geochemical Modeling Applied in Waste Disposal, and Its Relevance for Municipal Solid Waste Management. *Minerals*, 10 (10), 846. doi: <http://doi.org/10.3390/min10100846>
27. Rodrigo-Illari, J., Rodrigo-Clavero, M.-E., Cassiraga, E. (2020). BIOLEACH: A New Decision Support Model for the Real-Time Management of Municipal Solid Waste Bioreactor Landfills. *International Journal of Environmental Research and Public Health*, 17 (5), 1675. doi: <http://doi.org/10.3390/ijerph17051675>
28. Сергиенко, И. В., Скопецкий, В. В., Дейнека, В. С. (1991). Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных средах. Киев: Наукова думка, 432.
29. Ulianchuk-Martyniuk, O. V. (2020). Numerical simulation of the effect of semipermeable properties of clay on the value of concentration jumps of contaminants in a thin geochemical barrier. *Eurasian Journal of Mathematical and Computer Applications*, 8 (1), 91–104. doi: <http://doi.org/10.32523/2306-6172-2020-8-1-91-104>
30. Šimůnek, J., van Genuchten, M. T., Šejna, M. (2016). Recent Developments and Applications of the HYDRUS Computer Software Packages. *Vadose Zone Journal*, 15 (7). doi: <http://doi.org/10.2136/vzj2016.04.0033>
31. Clement, T. P., Hooker, B. S., Skeen, R. S. (1996). Macroscopic Models for Predicting Changes in Saturated Porous Media Properties Caused by Microbial Growth. *Ground Water*, 34 (5), 934–942. doi: <http://doi.org/10.1111/j.1745-6584.1996.tb02088.x>
32. Manfred, B., Jaap, B., Klaus, M., Rolf, M. (2006). Enumeration and Biovolume Determination of Microbial Cells. *Microbiological Methods for Assessing Soil Quality*. CABI Publishing, 93–113. doi: <https://doi.org/10.1079/9780851990989.0093>